Troisième Année Licence M.I.A.S.H.S. 2024 – 2025

Statistique 2

Contrôle Continu 1, Mars 2025

Examen de 1h30. Tout document ou calculatrice est interdit.

Exercice 1 (Sur 14 points)

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $I \subset \mathbf{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$ pour $k \in \mathbf{N}$ **(1pt)**.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k) - n\,\mathbb{P}(X > n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ **(1.5pts)**.
3. On suppose que $\mathbb{E}[X] < \infty$. Montrer que $n\,\mathbb{P}(X > n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ **(3pts)**. En déduire que
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) \quad \textbf{(1pt)}.$$
4. Dans une urne, on trouve n boules numérotées de 1 à n. On effectue m tirages indépendants d'une boule avec remise et on note X_n le plus grand numéro tiré parmi les m. Déterminer la fonction de répartition de X_n **(2pts)** et en déduire la loi de X_n **(0.5pts)**.
5. Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^m$ **(1pt)**. Déduire un équivalent de $\mathbb{E}[X_n]$ quand $n \to \infty$ **(2pts)**.
6. On suppose maintenant que Y_n est le maximum de m variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[1, n]$. Déterminer $\mathbb{E}[Y_n]$ et comparer avec le résultat précédent **(2pts)**.

Exercice 2 (Sur 9 points)

Soit le vecteur aléatoire X défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on suppose que la loi de X a pour densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$:

$$f_X(x_1, x_2) = C\,\mathbb{I}_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \qquad \text{pour tout } (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2,$$

avec $C \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer C pour que f_X soit bien une densité **(1.5pts)**.
2. En posant $X = (X_1, X_2)$, déterminer les lois de X_1 et de X_2 **(2pts)**.
3. Déterminer $\mathbb{E}[X_1]$ **(1pt)**.
4. Déterminer la loi de $Y = X_1^2 + X_2^2$ **(2pts)** et montrer que $\mathbb{E}[Y] = 1/2$ **(0.5pts)**. En déduire $\mathrm{var}(X_1)$ **(1pt)**.
5. A-t-on X_1 et X_2 indépendantes (justifier!) **(1pt)**?