Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

Licence M.I.A.S.H.S. troisième année 2023 – 2024

Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

Jean-Marc Bardet (Université Paris 1, SAMM)

Email: `bardet@univ-paris1.fr`
Page oueb: `http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet-`

U.F.R. 27 et Equipe SAMM (Statistique, Analyse et Modélisation Multidisiplinaire)
Université Panthéon-Sorbonne, 90 rue de Tolbiac, 75013 Paris.

Feuille n^o 1:
Variables aléatoires

1. **(*)** Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{A}$ la tribu borélienne sur Ω et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $[0,1]$.

   (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1-\omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance et sa variance.

   (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.

   (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z, son espérance et sa variance.

Proof. (a) La variable X est à valeurs dans $[0,1]$ car $1-\omega \in [0,1]$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Donc pour $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$ et pour $x \geq$, $F_X(x) = 1$. Pour $x \in [0,1]$, on a $\{X \leq x\} = \{\omega \in [0,1],\ 1-\omega \leq x\} = \{\omega \in [0,1],\ 1-x \leq \omega\} = [1-x, 1]$. Or $\mathbb{P}([1-x,1]) = x$ car $\mathbb{P}$ mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_X(x) = x$. La loi de X est donc celle d'une variable uniforme sur $[0,1]$, d'où $\mathbb{E}[X] = 1/2$ et $\mathrm{var}(X) = 1/12$.

(b) La variable Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$ car $\ln(\omega) \leq 0$ pour tout $\omega \in [0,1]$. Donc pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on a $\{Y \leq y\} = \{\omega \in [0,1],\ -\ln(\omega) \leq y\} = \{\omega \in [0,1],\ e^{-y} \leq \omega\} = [e^{-y}, 1]$. Or $\mathbb{P}([e^{-y}, 1]) = 1 - e^{-y}$ car $\mathbb{P}$ mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$: Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, donc $\mathbb{E}[Y] = 1$ et $\mathrm{var}(Y) = 1$.

(c) Les valeurs prises par Z sont $\{0\} \cup [0.5, 1]$. Ainsi, pour $z < 0$ alors $F_Z(z) = 0$, et pour $z \geq 1$, $F_Z(z) = 1$. Si $z \in [0, 0.5[$, $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}([0, 0.5[) = 0.5$. Si $z \in [0.5, 1]$, $F_Z(z) = 0.5 + \mathbb{P}(0.5 \leq Z \leq z) = 0.5 + \mathbb{P}([0.5, z]) = 0.5 + (z - 0.5) = z$.
$\mathbb{E}[Z] = \int_{[0,1/2]} 0\, d\omega + \int_{[1/2,1]} \omega\, d\omega = 0 + \left[\omega^2/2\right]_{1/2}^{1} = 3/8$.
Et $\mathbb{E}[Z^2] = \int_{[0,1/2]} 0\, d\omega + \int_{[1/2,1]} \omega^2\, d\omega = 0 + \left[\omega^3/3\right]_{1/2}^{1} = 7/24$, d'où $\mathrm{var}(Z) = 7/24 - 9/64 = 29/192 \simeq 0.151$. □

2. **(*)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X:

$$
\begin{aligned}
F_X(t) &= \frac{1}{2}\left(e^t \mathbb{I}_{]-\infty,0[}(t) + (2 - e^{-t})\mathbb{I}_{[0,\infty[}(t)\right); \\
F_X(t) &= \frac{1}{4}(t+2)\mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t) + \frac{3}{4}\mathbb{I}_{[0,1]}(t) + \mathbb{I}_{[2,\infty[}(t).
\end{aligned}
$$

Proof. Dans le premier cas, la fonction de répartition est continue et dérivable sur $\mathbf{R}^*$: la v.a. est donc continue et sa densité est $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$: loi de Laplace. On alors $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathrm{var}(X) = 2$.
Dans le second cas, il y a 2 sauts: en -1 avec un saut de hauteur de $1/4$ et en 0 avec un saut de hauteur $1/4$. La mesure de probabilité de X peut donc s'écrire:

$$
\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{4}\left(\delta_{\{-1\}}(B) + \delta_{\{0\}}(B)\right) + \frac{1}{4}\int_B \mathbb{I}_{[-1,0[\cup[1,2[}(t)\, dt \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).
$$

D'où $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4}\big(-1 + 0 - 1/2 + 3/2\big) = 0$ et $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4}\big(1 + 0 + \int_{-1}^{0} t^2 dt + \int_1^2 t^2 dt\big) = \frac{1}{4}\big(1 + \frac{8}{3}\big) = \frac{11}{12}$. □

3. **(*)** Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.

   (a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?

   (b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proof. (a) On a d'après la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1$. De plus $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-X < 0) = \mathbb{P}(X < 0)$ puisque X et $-X$ ont même loi, donc même fonction de répartition. D'où $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 2\mathbb{P}(X < 0)$. Par suite, $2\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$, d'où $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2$. Or, la formule des probabilités totales donne également $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - \mathbb{P}(X > 0)$ et ainsi $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$. $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$ en découle également.

(b) On va traiter les 2 cas de v.a. Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $I = (x_j)_{j\in J}$. Comme X et $-X$ ont même loi, forcément quand $x_j \in I$, alors $-x_j \in I$ et $\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X = -x_j)$. Or $\mathbb{E}(X) = \sum_{j\in J} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{j\in J,\, x_j>0} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{j\in J,\, x_j<0} x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) + 0 * \mathbb{P}(X = 0)$. En conséquence

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j\in J,\, x_j>0} \big(x_j \, \mathbb{P}(X = x_j) - x_j \, \mathbb{P}(X = -x_j)\big) = 0.$$

Pour une v.a. continue, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(-X < -x) = 1 - F_X(-x)$ car la variable est continue. Donc en tout x où F_X est dérivable, $F'_X(x) = 0 - (F_X(-x))' = F'_X(-x)$, d'où $f_X(x) = f_X(-x)$: la densité est une fonction paire. Donc $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) dx = 0$ car la fonction $x \to x \, f_X(x)$ est impaire.

□

4. **(**)** Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X. Montrer, en utilisant Fubini, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^\infty n \, t^{n-1}(1 - F_X(t)) \, dt = \int_0^\infty n \, t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) \, dt.$$

Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

Proof. Du fait que les fonctions intervenant dans l'intégrale sont mesurables positives, on peut écrire avec Fubini, quitte à obtenir $+\infty$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty n \, t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) \, dt &= \int_0^\infty n \, t^{n-1} \int_{]t,\infty[} d\mathbb{P}_X(x) \, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{]t,\infty[} n \, t^{n-1} \, d\mathbb{P}_X(x) \, dt \\
&= \int_0^\infty \int_{[0,x[} n \, t^{n-1} \, dt \, d\mathbb{P}_X(x) \quad \text{en réécrivant le domaine d'intégration} \\
&= \int_0^\infty x^n \, d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}|X^n].
\end{aligned}$$

Si $n = 1$ et X peut être négative, alors on peut avoir $\mathbb{E}[X] < 0$ ce qui n'est pas possible avec une telle formule. □

5. **(**)** Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.

   (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{y} \, e^{-\ln^2(y)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.

   (b) Pour $a \in [-1, 1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a \sin(2\pi \ln(y))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

Proof. (a) Il est clair que $Y : \Omega \to]0, \infty[$ et Y v.a. car $x \in \mathbf{R} \mapsto e^x$ est une fonction continue donc mesurable (borélienne). Donc pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Et pour $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(y)} e^{-t^2/2} dt.$$

Il est clair que pour tout $y > 0$ cette fonction est dérivable (donc continue) et sa limite en 0^+ est 0: F_Y est continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable partout sauf en 0, donc Y est une v.a. continue.
Sa dérivée, donc sa densité, sur $] - \infty, 0[$ est 0 et pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial}\big(F_X(\ln(y)) - F_X(-\infty)\big) = \frac{1}{y} \, f_X(\ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \, y} \, e^{-\ln^2(y)/2}.$$

(b) Pour tout $a \in [-1, 1]$, il est clair que $f_a(y)$ est mesurable positive, et son intégrale existe car $f_a \leq (1 + |a|) f_Y$. De plus,

$$\int_0^\infty f_a(y) \, dy = \int_0^\infty f_Y(y) \, dy + a \int_0^\infty f_Y(y) \, \sin(2\pi \, \ln(y)) \, dy = 1 + a \int_\infty^\infty e^x \, f_Y(e^x) \, \sin(2\pi \, x) \, dx.$$

Mais $e^x \, f_Y(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-x^2/2}$ fonction paire sur $\mathbf{R}$, donc $e^x \, f_Y(e^x) \, \sin(2\pi \, x)$ est une fonction impaire intégrable, donc son intégrale sur $\mathbf{R}$ est nulle. On en déduit que $\int_0^\infty f_a(y) \, dy = 1$ pour tout $a \in [-1, 1]$.
Si on calcule $\mathbb{E}[Y_a^n]$ (qui existe car $\mathbb{E}[Y^n]$ existe) alors:

$$\int_0^\infty y^n \, f_a(y) \, dy = \int_0^\infty y^n \, f_Y(y) \, dy + a \int_0^\infty y^n f_Y(y) \, \sin(2\pi \, \ln(y)) \, dy = \mathbb{E}[Y^n] + a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\infty^\infty e^{(n-1)x} \, e^{-x^2/2} \, \sin(2\pi \, x) \, dx.$$

Mais $e^{(n-1)x-x^2/2} = e^{-(n-1)^2/2}\, e^{-(x-(n-1))^2/2}$. Par changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^{\infty} e^{(n-1)x}\, e^{-x^2/2} \sin(2\pi\, x)\, dx &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-(x-(n-1))^2/2} \sin(2\pi\, x)\, dx \\ &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi\,(z+(n-1)))\, dz = e^{-(n-1)^2/2} \int_{\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi\, z)\, dz = 0,\end{aligned}$$

par parité. Donc $\mathbb{E}[Y_a^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in [-1,1]$: les moments ne caractérise pas la loi, puisque clairement Y_a et Y n'ont pas la même loi si $a \neq 0$.

□

6. **(*)** Soit $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = [X+1]$? (partie entière de $X+1$)

Proof. Y prend ses valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et $\mathbb{P}(Y=k) = \mathbb{P}(k \leq X+1 < k+1) = F_X(k) - F_X(k-1)$, donc $\mathbb{P}(Y=k) = (1-e^{-\lambda\, k}) - (1-e^{-\lambda(k-1)}) = \big(1-e^{-\lambda}\big)e^{-\lambda(k-1)}$. Ainsi $\mathbb{P}(Y=k) = \big(1-e^{-\lambda}\big)\big(e^{-\lambda}\big)^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}\big(1-e^{-\lambda}\big)$: loi géométrique. □

7. **(**)** Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur $\mathbf{R}$.
   (a) Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0,1[$, notée F_X^{-1}.
   (b) Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X.
   (c) A partir de la touche `RAND` d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
   (d) Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?

Proof. (a) Si F_X est strictement croissante et dérivable, donc continue, alors comme $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$, on en déduit que F_X : $\mathbf{R}ø]0,1[$. De plus, pour tout $y \in]0,1[$, s'il existe $x < x'$ tel que $F_X(x) = F_X(x') = y$ alors F_X ne serait pas strictement croissante: F_X est bien bijective, et admet une fonction réciproque F_X^{-1} sur $]0,1[$.

(b) Comme F_X est dérivable et strictement croissante, sa dérivée ne s'annule pas, donc F_X^{-1} est dérivable et strictement croissante sur $]0,1[$, donc continue: $F_X^{-1}(U)$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui prend ses valeurs dans $\mathbf{R}$. On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, en utiliant le fait que $F_X(F_X^{-1}(U)) = U$ et F_X strictement croissante,

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x) \qquad \text{car } F_U(u) = u \text{ pour tout } u \in [0,1].$$

La v.a. $F_X^{-1}(U)$ a donc même fonction de répartition que X, ces deux v.a. ont donc même loi.

(c) On sait que la touche `RAND` fournit une réalisation d'une v.a. uniforme sur $[0,1]$. Pour obtenir une réalisation d'une v.a. exponentielle de paramètre, il faudra donc calculer $V = F_X^{-1}(U)$. Or $F_X(x) = 1 - e^{-3\,x}$, d'où $x = -\ln(1-F_X(x))/3$ et on en déduit que $V = -\ln(1-U)/3$.

(d) Si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$ alors $x = \pi\, \tan(F_X(x) - 1/2)$ soit $W = F_X^{-1}(U) = \pi\, \tan(U - 1/2)$.
La densité de X est $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, c'est une v.a. qui suit une loi de Cauchy. On a alors $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx$. Mais cette intégrale n'existe pas car:

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}\, dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^{\infty} = +\infty.$$

□

8. **(*)** Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre λ. En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?

Proof. Si X v.a. de loi géométrique de paramètre p alors pour $z \in [-1,1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = p\,z \sum_{k=1}^{\infty} (z\,(1-p))^{k-1} = p\,z \sum_{k=0}^{\infty} (z\,(1-p))^k = \frac{p\,z}{1-(1-p)\,z}.$$

Si X v.a. de loi de Poisson de paramètre λ alors pour $z \in [-1,1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \,\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\,\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{z\,\lambda} = e^{(z-1)\,\lambda}.$$

Si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2, alors par indépendance

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[z^{X_1}]\,\mathbb{E}[z^{X_2}] = e^{(z-1)\,\lambda_1}\,e^{(z-1)\,\lambda_2} = e^{(z-1)\,(\lambda_1+\lambda_2)}$$

qui caractérise la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
Par le même raisonnement, si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2,

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \frac{p_1\,z}{1-(1-p_1)\,z}\,\frac{p_2\,z}{1-(1-p_2)\,z} = \frac{p_1\,p_2\,z^2}{(1-(1-p_1)\,z)(1-(1-p_2)\,z)}$$

qui ne peut clairement pas être simplifié pour faire apparaître la fonction génératrice d'une loi géométrique. □

9. **(*)** Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.

Proof. a/ Pour $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m\,,\sigma^2)$, on peut toujours écrire que $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} m + \sigma\,Z$, avec $Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0\,,1)$. On a alors $\phi_X(u) = \mathbb{E}\big[e^{i\,u\,(m+\sigma\,Z)}\big] = e^{i\,u\,m}\phi_Z(\sigma\,u)$. Mais:

$$\phi_Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,u\,x - x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\big((x-iu)+u^2\big)}\,dx = e^{-u^2/2},$$

après changement de variable $y = x - iu$. D'où $\phi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2\,u^2 + i\,u\,m}$.
b/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\,\lambda^k e^{iuk} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\,\big(\lambda\,e^{iu}\big)^k = e^{-\lambda} e^{\lambda\,e^{iu}} = e^{\lambda\,(e^{iu}-1)}.$$

c/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \int_0^{\infty} \lambda\,e^{-\lambda\,x + i\,u\,x} dx = \Big[\frac{\lambda}{i\,u-\lambda}\,e^{(-\lambda+i\,u)x}\Big]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{-i\,u+\lambda}.$$

d/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([a,b])$, alors pour $u \in \mathbf{R}^*$,

$$\phi_X(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i\,u\,x} dx = \frac{1}{b-a}\Big[\frac{\lambda}{i\,u}\,e^{i\,ux}\Big]_a^b = \frac{1}{i\,(b-a)\,u}\big(\cos(ub) - \cos(ua) + i(\sin(ub) - \sin(ua)\big).$$

e/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha,\beta)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\,e^{-\beta\,x + i\,u\,x} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - i\,u)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}\,e^{-y} dy = \big(1 - iu/\beta\big)^{-\alpha},$$

avec le changement de variable $y = (\beta - i\,u)x$, soit $dy = (\beta - i\,u)dx$.
f/ Si $X \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n,p)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} e^{iuk} = (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \Big(\frac{p\,e^i u}{1-p}\Big)^k = (1-p)^n \Big(1 + \frac{p\,e^i u}{1-p}\Big)^n = \big(1 + p\,(e^{iu}-1)\big)^n,$$

en utilisant la formule du binome.

Si deux v.a. X et X' sont gaussiennes de lois $\mathcal{N}(m\,,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m'\,,\sigma'^2)$ sont indépendantes, alors $\phi_{X+X'}(u) = \phi_X(u)\,\phi_{X'}(u)$ par l'indépendance, soit $\phi_{X+X'}(u) = e^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2\,u^2 + i\,u\,m - \frac{1}{2}\,\sigma'^2\,u^2 + i\,u\,m'} = e^{-\frac{1}{2}\,(\sigma^2+\sigma'^2)\,u^2 + i\,u\,(m+m')}$, soit la loi $\mathcal{N}(m+m'\,,\sigma^2+\sigma'^2)$. □

10. **(***)** En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ sur $\mathbf{R}$ est $\phi(u) = e^{-|u|}$.

Proof. On part de la formule de la densité caractéristique $\phi(u) = e^{-|u|}$. Comme on sait que X est une variable "continue" et que cette fonction caractéristique est intégrable, on utilise la formule d'inversion:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(u)\, e^{-i\,u\,x} du \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|-i\,u\,x} du$. On en déduit que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{0} e^{u-i\,u\,x} du + \frac{1}{2\,\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-u-i\,u\,x} du = \frac{1}{2\,\pi} \Big(\Big[\frac{e^{u-i\,u\,x}}{1-i\,x} \Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\frac{e^{-u-i\,u\,x}}{-1-i\,x} \Big]_{0}^{\infty} \Big) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}.$$

Par unicité de la fonction caractéristique, on en déduit que celle-ci est bien celle d'une loi de Cauchy. □

11. **(**)** Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

    (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X] + X\,\mathbb{I}_{\{X > \lambda\,\mathbb{E}[X]\}}$.

    (b) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

    $$\big(\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}\big]\big)^2 \leq \mathbb{E}[X^2]\,\mathbb{P}\big(X > \lambda\mathbb{E}[X]\big).$$

    (c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

    $$\mathbb{P}\big(X > \lambda\,\mathbb{E}[X]\big) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Proof. (a) Si $X > \lambda\,\mathbb{E}[X]$ alors le terme de droite vaut X, donc l'inégalité est vérifiée. Si $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X]$, alors $\lambda\,\mathbb{E}[X] + X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}} = \lambda\,\mathbb{E}[X]$. Mais comme cela a lieu pour $X \leq \lambda\,\mathbb{E}[X]$, l'inégalité est bien vérifiée. Elle l'est donc dans tous les cas.

(b) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{I}^2_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big] = \mathbb{E}\big[\mathbb{I}_{\{X>\lambda\mathbb{E}[X]\}}\big] = \mathbb{P}\big(X > \lambda\,\mathbb{E}[X]\big).$$

(c) Grâce à la première question, $X - \lambda\,\mathbb{E}[X] \leq X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}$. En prenant l'espérance on obtient donc que $(1-\lambda)\,\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big]$. Comme $\mathbb{E}[X] \geq 0$ et $\lambda \in [0,1]$, alors $(1-\lambda)\,\mathbb{E}[X] \geq 0$. Donc

$$(1-\lambda)^2\,\big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \leq \big(\mathbb{E}\big[X\,\mathbb{I}_{\{X>\lambda\,\mathbb{E}[X]\}}\big]\big)^2.$$

Le résultat final est alors obtenu grâce à celui de la deuxième question.

□

Feuille n^o 2:
Vecteurs aléatoires

1. **(*)** Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ dont la loi a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$,
$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi}\, e^{-x(1+y^2)} \mathbb{I}_{\{x,y\geq 0\}}.$$
   (a) Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
   (b) Déterminer les lois de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Proof. (a) En premier lieu, $f_{(X,Y)}$ est borélienne positive. Ensuite, en utilisant Fubini (les fonctions sont positives):
$$\int_{\mathbf{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Big[-\frac{e^{-x(1+y^2)}}{1+y^2} \Big]_0^\infty dy = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\, dy = 1.$$
(b) On a
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \frac{2\, e^{-x}}{\pi} \int_0^\infty e^{-x\, y^2}\, dy = \frac{2\, e^{-x}}{\pi \sqrt{2\, x}} \int_0^\infty e^{-z^2/2}\, dz = \frac{e^{-x}}{\pi \sqrt{2\, x}} \sqrt{2\pi} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi\, x}} \quad \text{si } x > 0 \\ &= 0 \quad \text{si } x \leq 0 \\ f_Y(y) &= \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} \quad \text{si } y \geq 0 \\ &= 0 \quad \text{si } y < 0. \end{aligned}$$
Il est clair que les 2 variables ne sont pas indépendantes car $f_X(x)\, f_Y(y) \neq f_{(X,Y)}(x, y)$.

□

2. **(*)** Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) Déterminer les fonctions de répartition des v.a. $U = \min\{X_1, X_2\}$ et $V = \max\{X_1, X_2\}$, et en déduire les densités de probabilité de U et V.
   (b) Calculer $\mathrm{cov}(U, V)$. Les variables U et V sont-elles indépendantes?
   (c) Que vaut $\mathbb{E}\big[|X_1 - X_2|\big]$?

Proof. (a) On a $F_V(v) = 0$ pour $v \notin [0, 1]$. Si $v \in [0, 1]$, alors $F_V(v) = \mathbb{P}(X_1 \leq v \cap X_2 \leq v) = v^2$ par indépendance de X_1 et X_2. Comme c'est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et dérivable par morceaux, alors V admet une densité et $f_V(v) = 2\, v\, \mathbb{I}_{v\in[0,1]}$.
De même, $\mathbb{P}(U \leq u) = 1 - \mathbb{P}(U > u) = \mathbb{P}(X_1 > u \cap X_2 > u) = 1 - (1-u)^2$ pour $u \in [0, 1]$. D'où $f_U(u) = 2\,(1-u)\, \mathbb{I}_{u\in[0,1]}$.
(b) On a $\mathbb{E}[U] = 2 \int_0^1 u(1-u)du = [u^2 - \frac{2}{3}u^3]_0^1 = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}[V] = 2 \int_0^1 v^2 dv = [\frac{2}{3}v^3]_0^1 = \frac{2}{3}$. Et $\mathbb{E}[UV] = \mathbb{E}[X_1 X_2] = \mathbb{E}[X_1]\, \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{4}$ par indépendance. D'où $\mathrm{cov}(U, V) = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$.
Les variables ne sont pas indépendantes car $\mathrm{cov}(U, V) \neq 0$.
(c) Il est clair que $\mathbb{E}\big[|X_1 - X_2|\big] = \mathbb{E}[V - U] = \mathbb{E}[V] - \mathbb{E}[U] = \frac{1}{3}$.

□

3. **(**)** On considère $X = (X_1, X_2)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On suppose que X est absolument continue, c'est-à-dire que la mesure de probabilité de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer alors que la loi de X_1 admet une densité f_1 par rapport à la mesure de Lebegue λ_1 sur $\mathbb{R}$, que l'on exprimera en fonction de f.

(b) Calculer f_1 et f_2 pour f telle que :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} e^{-x_1} & \text{si } x_1 \geq x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A-t-on $f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ pour λ_2-presque tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$? Quelle conclusion en tirer sur X_1 et X_2?

(c) On suppose maintenant que $X = (X_1, X_1)$ où X_1 est absolument continue par rapport à λ_1. Le vecteur aléatoire X est-il absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$?

Proof. (a) La fonction de répartition de X_1 est, pour $x \in \mathbf{R}$,

$$F_{X_1}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{x_1 \leq x} \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_{-\infty}^{x} \Big(\int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \Big)\, dx_1,$$

par Fubini. Donc $F_{X_1}(x)$ s'écrit sous la forme $\int_{-\infty}^{x} f_1(x_1)\, dx_1$ avec $f_1(x_1) = \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2$. Comme f est borélienne positive, f_1 l'est également. Donc la loi de X_1 est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et sa densité est f_1.

(b) On a:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \int_0^{x_1} e^{-x_1}\, dx_2\, \mathbb{I}_{x_1 \geq 0} = x_1\, e^{-x_1} \mathbb{I}_{x_1 \geq 0} \quad \text{loi } \Gamma(2, 1) \\ f_2(x_2) &= \int_{x_2}^{\infty} e^{-x_1}\, dx_1\, \mathbb{I}_{x_2 \geq 0} = e^{-x_2} \mathbb{I}_{x_2 \geq 0} \quad \text{loi } \mathcal{E}(1) \end{aligned}$$

Il est clair que $f(x_1, x_2) \neq f_1(x_1)\, f_2(x_2)$, donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) On a $X \in D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ y = x\}$ bissectrice du plan. Donc l'ensemble des valeurs prises par X est un ensemble D de $\mathbf{R}^2$ de mesure de Lebesgue $\lambda_2(D) = 0$: le vecteur aléatoire X n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2 sur $\mathbb{R}^2$, mais il l'est par rapport à la mesure de Lebesgue sur D.

□

4. **(**)** Soit L une v.a. positive admettant une densité de probabilité f et X une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$ indépendante de L. On définit deux v.a. L_1 et L_2 par $L_1 = X\, L$ et $L_2 = (1 - X)\, L$ (cela représente par exemple la rupture aléatoire en 2 morceaux de longueurs L_1 et L_2 d'une certaine molécule de longueur initiale (aléatoire) L).

(a) Déterminer la loi du couple (L_1, L_2), ainsi que les lois marginales de L_1 et L_2.

(b) Que peut-on dire du couple (L_1, L_2) lorsque $f(y) = \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(y)\lambda^2 y e^{-\lambda y}$ $(\lambda > 0)$?

(c) Déterminer la loi de $Z = \min\{L_1, L_2\}$.

Proof. (a) Soit $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}_+$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{E}[g(X\, L, (1 - X)\, L)] = \mathbb{E}[h(X, L)],$$

où $h(x, \ell) = g(xl, (1 - x)\ell)$.
Le but est de trouver une formule du type

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}^2} g(x_1, x_2) f_{(L_1,L_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Si on prend $g = \mathbb{I}_C$ avec $C \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^2)$, cela nous fournira une densité du couple (L_1, L_2). Ou, si par exemple, $g(l_1, l_2) = \mathbb{I}_{]-\infty,x]}(l_1) 1_{]-\infty,y]}(l_2)$, on trouvera que

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{P}(L_1 \leq x,\ L_2 \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(L_1,L_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Le but de ce qui suit est trouver une formule explicite pour $f_{(L_1,L_2)}$. On travaille avec une fonction g arbitraire (c'est juste plus simple à écrire.)
Par théorème de transfert appliqué au couple (X, L),

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \mathbb{E}[h(X, L)] = \int_{\mathbf{R}^2} h(x, \ell) \mathbb{P}_{(X,L)}(dx, d\ell).$$

Par indépendance de X et L,

$$\mathbb{P}_{(X,L)}(dx, d\ell) = \mathbb{P}_X(dx) \otimes \mathbb{P}_L(d\ell) = \mathbb{I}_{[0,1]}(x) f(\ell) dx d\ell.$$

Donc,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell)(\int_0^1 h(x,\ell)dx)d\ell = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell)\int_0^1 g(xl,(1-x)\,\ell)dxd\ell.$$

Soit le changement de variables $x_1 = x\,\ell, x_2 = (1-x)\,\ell$. Alors

$$\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(x,\ell)} = \begin{pmatrix} \ell & x \\ -\ell & 1-x \end{pmatrix},$$

avec det $\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(x,\ell)} = \ell = x_1 + x_2$. Par conséquent,

$$\mathbb{E}[g(L_1, L_2)] = \int_{\mathbf{R}_+^2} g(x_1,x_2)\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}dx_1dx_2.$$

La densité commune de (L_1, L_2) est donc

$$f_{(L_1,L_2)}(x_1,x_2) = \frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\mathbb{I}_{x_1,x_2\geq 0}.$$

Lois marginales : puisque $X \sim 1-X$, clairement, $L_1 \sim L_2$: les deux coordonnées suivent la même loi. Soit maintenant $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction test mesurable.

$$\mathbb{E}[g(L_1)] = \int_{\mathbf{R}_+} \left(\int_0^1 g(\ell\,x)dx\right) f(\ell)d\ell.$$

Changement de variables : $\ell\,x = y$, avec ℓ fixé, donc $\ell\,dx = dy,\ dx = \frac{1}{\ell}dy$. Cela donne

$$\mathbb{E}[g(L_1)] = \int_{\mathbf{R}_+} f(\ell)(\frac{1}{l}\int_0^\ell g(y)dy)dl = \int_0^\infty g(y)\left(\int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}d\ell\right)dy,$$

où on a utilisé Fubini. L_1 possède donc la densité

$$f_{L_1}(y) = \int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}d\ell, y > 0.$$

(b) Si $f(y) = \mathbb{I}_{[0,+\infty[}(y)\lambda^2 y e^{-\lambda y}$, nous avons

$$f(\ell)/\ell = \lambda^2 e^{-\lambda\,\ell},$$

et

$$\int_y^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}d\ell = \lambda e^{-\lambda y} :$$

L_1 et L_2 suivent donc une loi exponentielle de paramètre λ.

(c) $\min(L_1, L_2) = \min(X, 1-X)\,L$. Donc, avec $g : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction test mesurable,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Z)] &= \int_0^\infty f(\ell)\left(\int_0^1 g(\min(u,1-u)\,\ell)du\right)d\ell \\ &= \int_0^\infty f(\ell)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell\,u)du + \int_{\frac{1}{2}}^1 g(\ell\,(1-u))du\right)d\ell.\end{aligned}$$

On fait un changement de variables dans la deuxième expression: $1-u = v$, donc $v \in [0,\frac{1}{2}]$ et

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 g(\ell\,(1-u))du = \int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell\,v)dv.$$

On reconnait la première expression... Donc, en posant $y = \ell\,u$, avec ℓ fixé, $dy = \ell\,du$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Z)] = 2\int_0^\infty f(\ell)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} g(\ell\,u)\,du\right)d\ell &= 2\int_0^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}\left(\int_0^{l/2} g(y)dy\right)d\ell \\ &= 2\int_0^\infty g(y)\left(\int_{2y}^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}d\ell\right)dy.\end{aligned}$$

On conclut que pour $y > 0$,

$$f_Z(y) = 2\int_{2y}^\infty \frac{f(\ell)}{\ell}\,d\ell.$$

□

5. **(**)** On considère un couple indépendant de v.a. (X, Y). On suppose que X admet une densité f et que Y est une variable discrète qui prend ses valeurs dans $\{y_n\,, n \in I\}$, $I \subseteq \mathbf{N}$ où $(y_n)_{n\in I} \subset \mathbb{R}$. Montrer que $Z = X + Y$ possède une densité f_Z et donner sa formule.

Proof. Puisque $Z = X + y_n$ sur $\{Y = y_n\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z \le z) &= \sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n, X \le z - y_n) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n)\mathbb{P}(X \le z - y_n) = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n) F_X(z - y_n)\\ &= \sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n) \int_{-\infty}^{z-y_n} f(x)\, dx = \sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n) \int_{-\infty}^{z} f(u - y_n) du\\ &= \int_{-\infty}^{z} \left(\sum_{n\in I} \mathbb{P}(Y = y_n) f(u - y_n)\right) du,\end{aligned}$$

avec le changement de variables $u = x + y_n$ et puis Fubini. Donc, la densité de Z est donnée par

$$f_Z(z) = \sum_{n\in I} P(Y = y_n)\, f(z - y_n).$$

□

6. **(***)** Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un échantillon de n v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\exists (i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2, i \ne j, X_i = X_j) = 0$.
   (b) On pose $Z = \min_{1\le i\le n} X_i$. Déterminer la loi de Z.
   (c) Soit $N = \min\{1 \le i \le n, X_i = Z\}$. Montrer que N est une v.a. et établir que $\mathbb{P}(N = k,\, Z > t) = \dfrac{e^{-nt}}{n}$ pour $k = 1, \cdots, n$ et $t > 0$. En déduire que Z et N sont des v.a. indépendantes et préciser la loi de N.

Proof. (a) $\mathbb{P}\big(\exists (i, j) \in \{1, \cdots, n\}^2, i \ne j, X_i = X_j\big) = \int_D f(x)f(y)\, d\lambda_2(x, y)$, où D est la première bissectrice, soit $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\, x = y\}$. Comme $\lambda_2(D) = 0$ alors $\int_D f(x)f(y)\, d\lambda_2(x, y) = 0$.

(b) Z prend ses valeurs dans $[0, \infty[$. Pour $z < 0$, $F_Z(z = \mathbb{P}(Z \le z) = 0$. Pour $z \ge 0$,

$$F_Z(z) = 1 - \mathbb{P}\big(X_1 > z \cap \ldots \cap X_n > z\big) = 1 - \Big(\int_z^\infty e^{-x}\, dx\Big)^n = 1 - e^{-n\, z}.$$

En conséquence, Z suit une loi exponentielle de paramètre n.

(c) Si $N = \min\{1 \le i \le n, X_i = Z\}$, cela signifie que N est le plus petit indice pour lequel X_i atteint son minimum. Mais les applications X_i et Z sont mesurables, donc les applications $Y_i = i\, \mathbb{I}_{X_i=Z} + n\, \mathbb{I}_{X_i\ne Z}$ également, d'où l'application $\min_{1\le i\le n}(Y_i)$ également. Donc N est une variable aléatoire.
Deux preuves possibles:

- Par la formule des probabilités totales: $\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(N = j, Z > t) = \mathbb{P}(Z > t)$. Mais par le fait que les v.a. (X_i) sont i.i.d., alors $\mathbb{P}(N = j, Z > t) = \mathbb{P}(N = k, Z > t)$ pour tout j. D'où $n\, \mathbb{P}(N = k, Z > t) = \mathbb{P}(Z > t)$, d'où le résultat.
- $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \mathbb{P}(\min_{i\ne k} X_i \ge X_k, X_k > t)$. Comme X_k et $\min_{i\ne k} X_i$ sont indépendants, et comme $\mathbb{P}(\min_{i\ne k} X_i > x_k) = e^{-(n-1)x_k}$ pour $x_k > 0$, on en déduit que:

$$\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \int_t^\infty e^{-x_k}\, e^{-(n-1)x_k}\, dx\, dx_k = \frac{e^{-nt}}{n}.$$

De ceci, on en déduit que $\mathbb{P}(N = k \mid Z > t) = \mathbb{P}(N = k\ \cap\ Z > t)/\mathbb{P}(Z > t) = \frac{1}{n}$ et ceci pour tout $k = 1, \ldots, n$ et tout $t > 0$: les deux variables sont indépendantes.
Et $\mathbb{P}(N = k, Z > t) = \frac{1}{n}$ pour tout k: N suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

□

7. **(**)** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.i.i.d., uniformes sur $[0, 1]$,.
   (a) On pose $W_i = -\log(X_i)$. Montrer que W_i suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) On rappelle qu'une loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta)$ de paramètres (p, α) avec $\alpha, \beta > 0$ est une loi continue de densité sur $\mathbf{R}$:

$$f_{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\beta\, x}\, \mathbb{I}_{x>0}$$

   Soient U, V indépendants telles que $U \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $V \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha_2, \beta)$. Quelle est la loi de $U + V$?
   (c) En déduire la loi de $W_1 + \cdots + W_n$.
   (d) Utiliser le résultat précédent pour trouver la loi de $\prod_{i=1}^n X_i$.

Proof. (a) $\mathbb{P}(W_i > x) = \mathbb{P}(-\log(X_i) > x) = \mathbb{P}(\log(X_i) < -x) = \mathbb{P}(X_i < e^{-x}) = \mathbb{P}(X_i \le e^{-x})$, car X_i possède une densité. Enfin, $\mathbb{P}(X_i \le e^{-x}) = e^{-x}$, par définition de la loi uniforme. Donc $\mathbb{P}(W_i \le x) = 1 - e^{-x}$: on reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.

(b) On montre en utilisant la fonction caractéristique que la somme de deux v.a. indépendantes Z_1 et Z_2 de lois $\Gamma(\alpha_1, \beta)$ et $\Gamma(\alpha_2, \beta)$, respectives, suit encore une loi Gamma: $\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$. En effet, la fonction caractéristique d'une loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ est $\phi(u) = \big(1 - i\,\frac{u}{\beta}\big)^{\alpha}$. D'où $\phi_{Z_1+Z_2}(u) = \phi_{Z_1}(u)\,\phi_{Z_2}(u) = \big(1 - i\,\frac{u}{\beta}\big)^{\alpha_1}\big(1 - i\,\frac{u}{\beta}\big)^{\alpha_2} = \big(1 - i\,\frac{u}{\beta}\big)^{\alpha_1+\alpha_2}$ en utilisant l'indépendance entre Z_1 et Z_2.

(c) Puisque la loi exponentielle de paramètre β est une $\Gamma(1, \beta)$, nous avons donc que $W_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(1,1)$ et donc $W_1 + W_2 + \cdots + W_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(n, 1)$.

(d) Soit $Y = W_1 + W_2 + \cdots + W_n \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(n, 1)$. Donc, pour $x \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n \le x) = \mathbb{P}(e^{-Y} \le x) = \mathbb{P}(-Y \le \log x) = \mathbb{P}(Y \ge -\log x) = 1 - F_Y(-\log x),$$

avec F_Y la fonction de répartition de Y. La densité de $X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$ est donc donnée par

$$\frac{1}{x}\, f_{(n,1)}(-\log x)\,\mathbb{I}_{x\in(0,1)},$$

avec $f_{(n,1)}$ la densité de la loi $\Gamma(n, 1)$.

$\square$

8. **(**)** Soient X et Y deux variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = |X - Y|$.

   (a) Calculer $\mathbb{P}(S > a, T > b, X > Y)$ et $\mathbb{P}(S > a, T > b, X < Y)$.

   (b) En déduire $\mathbb{P}(X < Y)$, la loi de S, et la loi de T.

Proof. (a) Choisissons a et b des réels positifs (les autres cas ne sont pas informatifs). Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > a, T > b, X > Y) = \mathbb{P}(Y > a, X - Y > b) &= \int_a^{\infty} \beta\, e^{-\beta\, y} \int_{b+y} \alpha\, e^{-\alpha\, x} dx\, dy \\ &= \int_a^{\infty} \beta\, e^{-\alpha\,(b+y) - \beta\, y}\, dy = \frac{\beta\, e^{-\alpha\, b - (\alpha+\beta)\, a}}{\alpha + \beta}.\end{aligned}$$

Par symmétrie, $\mathbb{P}(S > a, T > b, X < Y) = \dfrac{\alpha\, e^{-\beta\, b - (\alpha+\beta)\, a}}{\alpha + \beta}$.

(b) Il suffit de choisir $a = b = 0$ pour en déduire $\mathbb{P}(X < Y) = \dfrac{\alpha\, e^{-\beta\, b - (\alpha+\beta)\, a}}{\alpha + \beta}$.
Par ailleurs, on choisissant $b = 0$, on a

$$\mathbb{P}(S > a) = \mathbb{P}(S > a, X < Y) + \mathbb{P}(S > a, X < Y) = \frac{\beta\, e^{-(\alpha+\beta)\, a}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\, e^{-(\alpha+\beta)\, a}}{\alpha+\beta} = e^{-(\alpha+\beta)\, a}$$

donc S suit une loi exponentielle de paramètre $\alpha + \beta$.
Pour la loi de T, on fixe $a = 0$ et

$$\mathbb{P}(T > b) = \mathbb{P}(T > b, X < Y) + \mathbb{P}(T > b, X < Y) = \frac{\beta\, e^{-\alpha\, b}}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha\, e^{-\beta\, b}}{\alpha+\beta} = \frac{\beta\, e^{-\alpha\, b} + \alpha\, e^{-\beta\, b}}{\alpha+\beta}.$$

On en déduit que la densité de T est $\dfrac{\alpha\,\beta}{\alpha+\beta}\left(e^{-\alpha\, x} + e^{-\beta\, x}\right)\mathbb{I}_{x\ge 0}$.

$\square$

9. **(**)** Soit (X_1, X_2, X_3) vecteur aléatoire centré de matrice de covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

   (a) Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$.

   (b) En déduire que X_3 est une combinaison linéaire de X_1 et X_2 p.s.

(c) Plus généralement, pour un vecteur aléatoire Y de matrice de covariance Γ, donner une condition nécessaire et suffisante sur Γ pour que l'une des composantes de Y soit une fonction affine des autres composantes de Y p.s.

(d) Soit maintenant Z un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}^d$, $d \geq 1$. Supposons que Z admette une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$. Soit $x \in \mathbf{R}^d$ un vecteur non-nul. Montrer qu'alors la v.a. $U = x^t Z$ a une densité sur $\mathbf{R}$.

(e) Si Y est un vecteur aléatoire de matrice de covariance non-inversible, peut-il avoir une densité?

Proof. (a) On a $\mathrm{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = \mathrm{cov}\big((-\alpha_1, -\alpha_2, 1)\, X\big) = (-\alpha_1, -\alpha_2, 1)\, A\, {}^t(-\alpha_1, -\alpha_2, 1)$, donc $\mathrm{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = 2\,\alpha_1^2 + 5\,\alpha_2^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2 - 6\,\alpha_1 - 12\,\alpha_2 + 9$.

(b) On peut calculer le déterminant de la matrice A, et on montre que $\det(A) = 0$. Donc 0 est valeur propre. On peut alors déterminer le sous-espace propre associé à 0. Cela revient à résoudre le système:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + 3z & = & 0 \\ x + 5y + 6z & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & -y \end{array} \right. .$$

Le sous-espace, qui est de dimension 1 est donc généré par le vecteur $(1, 1, -1)$. On en déduit qu'en choisissant $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ alors $\mathrm{var}(X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2) = 0$, soit $X_3 = X_1 + X_2$ p.s.

(c) Il est clair que cette CNS est "la matrice de covariance admet 0 comme valeur propre" (ou bien son déterminant est nul).

(d) Comme x est un vecteur non nul, on peut alors considérer $(f_2, \ldots, f_d)$ famille orthonormée de $d-1$ vecteurs de $\mathbf{R}^d$ telle que $(\frac{x}{\|x\|}, f_2, \ldots, f_d)$ soit une base orthonormale de R^d (on a $\|x\| > 0$ car x non nul). Ainsi, pour $u \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathbb{P}(U \leq u) = \int_{{}^t xz \leq u} f\Big(({}^t xz)\,\frac{x}{\|x\|^2} + \sum_{j=2}^{d} < f_j, z > f_j\Big)\, d\lambda_d(z) = \int_{\|x\| z_1' \leq u} f\Big(z_1'\,\frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^{d} z_j' f_j\Big)\, dz_1' \ldots dz_d'$$
$$= \int_{z_1' \leq \frac{u}{\|x\|}} \Big(\int_{\mathbf{R}^{d-1}} f\Big(z_1'\,\frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^{d} z_j' f_j\Big)\, dz_2' \ldots dz' d\Big) dz_1'$$

après un changement de variable de déterminant $= 1$ (changement d'une base orthonormale à une autre base orthonormale) et en utilisant Fubini. si l'on note

$$f_x(z_1') = \int_{\mathbf{R}^{d-1}} f\Big(z_1'\,\frac{x}{\|x\|} + \sum_{j=2}^{d} z_j' f_j\Big)\, dz_2' \ldots dz' d$$

on a pu écrire F_U sous la forme $\int_{-\infty}^{\frac{u}{\|x\|}} f_x(z_1') dz_1' = \int_{-\infty}^{u} \|x\|\, f_x(t/\|x\|)\, dt$, où f_x est une fonction positive mesurable, donc U est une variable continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

(e) On montre que Y a une densité sur le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^d$ constitué par la somme directe des sous-espaces propres des valeurs propres non nulles de la matrice de coviance.

□