

Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2024 – 2025

Feuilles de TD, cours de L3 Statistique 2

JEAN-MARC BARDET (UNIVERSITÉ PARIS 1, SAMM)

Email: bardet@univ-paris1.fr

Page oueb: <http://samm.univ-paris1.fr/-Jean-Marc-Bardet->

Feuille n° 1: Variables aléatoires

1. (*) Soit l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{A} la tribu borélienne sur Ω et \mathbb{P} la probabilité uniforme sur $[0, 1]$.
- (a) On pose X la variable aléatoire telle que $X(\omega) = 1 - \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. Déterminer la loi de probabilité de X , son espérance et sa variance.
- (b) Répondre aux mêmes questions pour $Y(\omega) = -\ln(\omega)$.
- (c) On pose $Z(\omega) = \omega$ pour $\omega \in [0.5, 1]$ et $Z(\omega) = 0$ pour $\omega \in [0, 0.5[$. Déterminer la fonction de répartition de Z , son espérance et sa variance.

Proof. (a) La variable X est à valeurs dans $[0, 1]$ car $1 - \omega \in [0, 1]$ pour tout $\omega \in [0, 1]$. Donc pour $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$ et pour $x \geq 1$, $F_X(x) = 1$. Pour $x \in [0, 1]$, on a $\{X \leq x\} = \{\omega \in [0, 1], 1 - \omega \leq x\} = \{\omega \in [0, 1], 1 - x \leq \omega\} = [1 - x, 1]$. Or $\mathbb{P}([1 - x, 1]) = x$ car \mathbb{P} mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_X(x) = x$. La loi de X est donc celle d'une variable uniforme sur $[0, 1]$, d'où $\mathbb{E}[X] = 1/2$ et $\text{var}(X) = 1/12$.

(b) La variable Y est à valeurs dans $[0, +\infty[$ car $\ln(\omega) \leq 0$ pour tout $\omega \in [0, 1]$. Donc pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Pour $y \geq 0$, on a $\{Y \leq y\} = \{\omega \in [0, 1], -\ln(\omega) \leq y\} = \{\omega \in [0, 1], e^{-y} \leq \omega\} = [e^{-y}, 1]$. Or $\mathbb{P}([e^{-y}, 1]) = 1 - e^{-y}$ car \mathbb{P} mesure la longueur de l'intervalle, d'où $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$: Y suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, donc $\mathbb{E}[Y] = 1$ et $\text{var}(Y) = 1$.

(c) Les valeurs prises par Z sont $\{0\} \cup [0.5, 1]$. Ainsi, pour $z < 0$ alors $F_Z(z) = 0$, et pour $z \geq 1$, $F_Z(z) = 1$. Si $z \in [0, 0.5[$, $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}([0, 0.5]) = 0.5$. Si $z \in [0.5, 1]$, $F_Z(z) = 0.5 + \mathbb{P}(0.5 \leq Z \leq z) = 0.5 + \mathbb{P}([0.5, z]) = 0.5 + (z - 0.5) = z$.

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{[0, 1/2]} 0 \, d\omega + \int_{[1/2, 1]} \omega \, d\omega = 0 + [\omega^2/2]_{1/2}^1 = 3/8.$$

$$\text{Et } \mathbb{E}[Z^2] = \int_{[0, 1/2]} 0 \, d\omega + \int_{[1/2, 1]} \omega^2 \, d\omega = 0 + [\omega^3/3]_{1/2}^1 = 7/24, \text{ d'où } \text{var}(Z) = 7/24 - 9/64 = 29/192 \simeq 0.151.$$

□

2. (*) Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X . Déterminer dans les 2 cas suivants l'espérance et la variance de X :

$$F_X(t) = \frac{1}{2} (e^t \mathbb{I}_{]-\infty, 0[}(t) + (2 - e^{-t}) \mathbb{I}_{[0, \infty[}(t));$$

$$F_X(t) = \frac{1}{4} (t + 2) \mathbb{I}_{[-1, 0[\cup [1, 2[}(t) + \frac{3}{4} \mathbb{I}_{[0, 1]}(t) + \mathbb{I}_{[2, \infty[}(t).$$

Proof. Dans le premier cas, la fonction de répartition est continue et dérivable sur \mathbf{R}^* : la v.a. est donc continue et sa densité est $f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$: loi de Laplace. On alors $\mathbb{E}[X] = 0$ et $\text{var}(X) = 2$.

Dans le second cas, il y a 2 sauts: en -1 avec un saut de hauteur de $1/4$ et en 0 avec un saut de hauteur $1/4$. La mesure de probabilité de X peut donc s'écrire:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \frac{1}{4} (\delta_{\{-1\}}(B) + \delta_{\{0\}}(B)) + \frac{1}{4} \int_B \mathbb{I}_{[-1, 0[\cup [1, 2[}(t) \, dt \quad \text{pour } B \in \mathcal{B}(\mathbf{R}).$$

$$\text{D'où } \mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} (-1 + 0 - 1/2 + 3/2) = 0 \text{ et } \text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4} (1 + 0 + \int_{-1}^0 t^2 dt + \int_1^2 t^2 dt) = \frac{1}{4} (1 + \frac{8}{3}) = \frac{11}{12}. \quad \square$$

3. (*) Soit une variable aléatoire X sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que loi de X est symétrique, c'est-à-dire que la loi de X est la même que celle de $-X$.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$. Conclusion?

(b) Montrer que si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{E}(X) = 0$.

Proof. (a) On a d'après la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(X = 0) = 1$. De plus $\mathbb{P}(X > 0) = \mathbb{P}(-X < 0) = \mathbb{P}(X < 0)$ puisque X et $-X$ ont même loi, donc même fonction de répartition. D'où $\mathbb{P}(X > 0) + \mathbb{P}(X < 0) = 2\mathbb{P}(X < 0)$. Par suite, $2\mathbb{P}(X > 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$, d'où $\mathbb{P}(X > 0) \leq 1/2$. Or, la formule des probabilités totales donne également $\mathbb{P}(X \leq 0) = 1 - \mathbb{P}(X > 0)$ et ainsi $\mathbb{P}(X \leq 0) \geq 1/2$. $\mathbb{P}(X < 0) \leq 1/2$ en découle également.

- (b) On va traiter les 2 cas de v.a. Si X est une v.a. discrète à valeurs dans $I = (x_j)_{j \in J}$. Comme X et $-X$ ont même loi, forcément quand $x_j \in I$, alors $-x_j \in I$ et $\mathbb{P}(X = x_j) = \mathbb{P}(X = -x_j)$. Or $\mathbb{E}(X) = \sum_{j \in J} x_j \mathbb{P}(X = x_j) = \sum_{j \in J, x_j > 0} x_j \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_{j \in J, x_j < 0} x_j \mathbb{P}(X = x_j) + 0 * \mathbb{P}(X = 0)$. En conséquence

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j \in J, x_j > 0} (x_j \mathbb{P}(X = x_j) - x_j \mathbb{P}(X = -x_j)) = 0.$$

Pour une v.a. continue, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X > x) = 1 - \mathbb{P}(-X < -x) = 1 - F_X(-x)$ car la variable est continue. Donc en tout x où F_X est dérivable, $F'_X(x) = 0 - (F_X(-x))' = F'_X(-x)$, d'où $f_X(x) = f_X(-x)$: la densité est une fonction paire. Donc $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 0$ car la fonction $x \rightarrow x f_X(x)$ est impaire. \square

4. (**) Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé, on considère une v.a. réelle positive X de fonction de répartition F_X . Montrer, en utilisant Fubini, que pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_0^{\infty} n t^{n-1} (1 - F_X(t)) dt = \int_0^{\infty} n t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) dt.$$

Montrer que l'hypothèse X positive est nécessaire.

Proof. Du fait que les fonctions intervenant dans l'intégrale sont mesurables positives, on peut écrire avec Fubini, quitte à obtenir $+\infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} n t^{n-1} \mathbb{P}(X > t) dt &= \int_0^{\infty} n t^{n-1} \int_{]t, \infty[} d\mathbb{P}_X(x) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{]t, \infty[} n t^{n-1} d\mathbb{P}_X(x) dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{]0, x[} n t^{n-1} dt d\mathbb{P}_X(x) \quad \text{en réécrivant le domaine d'intégration} \\ &= \int_0^{\infty} x^n d\mathbb{P}_X(x) = \mathbb{E}[X^n]. \end{aligned}$$

Si $n = 1$ et X peut être négative, alors on peut avoir $\mathbb{E}[X] < 0$ ce qui n'est pas possible avec une telle formule. \square

5. (**) Soit X une v.a. réelle normale centrée réduite. Soit la v.a. $Y = e^X$. On dit que Y suit une loi log-normale.

- (a) Montrer que Y à une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de densité $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{y} e^{-\ln^2(y)/2}$ si $z > 0$ et 0 sinon.
- (b) Pour $a \in [-1, 1]$, soit Y_a la v.a. de densité $f_a(y) = f_Y(y)(1 + a \sin(2\pi \ln(y)))$. Montrer que Y et Y_a ont mêmes moments, et en déduire que les moments ne caractérisent pas une loi de probabilité.

Proof. (a) Il est clair que $Y : \Omega \rightarrow]0, \infty[$ et Y v.a. car $x \in \mathbf{R} \mapsto e^x$ est une fonction continue donc mesurable (borélienne). Donc pour $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$. Et pour $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\ln(y)} e^{-t^2/2} dt.$$

Il est clair que pour tout $y > 0$ cette fonction est dérivable (donc continue) et sa limite en 0^+ est 0: F_Y est continue sur \mathbf{R} et dérivable partout sauf en 0, donc Y est une v.a. continue.

Sa dérivée, donc sa densité, sur $] - \infty, 0[$ est 0 et pour $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{\partial}{\partial y} (F_X(\ln(y)) - F_X(-\infty)) = \frac{1}{y} f_X(\ln(y)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} y} e^{-\ln^2(y)/2}.$$

- (b) Pour tout $a \in [-1, 1]$, il est clair que $f_a(y)$ est mesurable positive, et son intégrale existe car $f_a \leq (1 + |a|)f_Y$. De plus,

$$\int_0^{\infty} f_a(y) dy = \int_0^{\infty} f_Y(y) dy + a \int_0^{\infty} f_Y(y) \sin(2\pi \ln(y)) dy = 1 + a \int_{-\infty}^{\infty} e^x f_Y(e^x) \sin(2\pi x) dx.$$

Mais $e^x f_Y(e^x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ fonction paire sur \mathbf{R} , donc $e^x f_Y(e^x) \sin(2\pi x)$ est une fonction impaire intégrable, donc son intégrale sur \mathbf{R} est nulle. On en déduit que $\int_0^{\infty} f_a(y) dy = 1$ pour tout $a \in [-1, 1]$.

Si on calcule $\mathbb{E}[Y_a^n]$ (qui existe car $\mathbb{E}[Y^n]$ existe) alors:

$$\int_0^{\infty} y^n f_a(y) dy = \int_0^{\infty} y^n f_Y(y) dy + a \int_0^{\infty} y^n f_Y(y) \sin(2\pi \ln(y)) dy = \mathbb{E}[Y^n] + a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n-1)x} e^{-x^2/2} \sin(2\pi x) dx.$$

Mais $e^{(n-1)x-x^2/2} = e^{-(n-1)^2/2} e^{-(x-(n-1))^2/2}$. Par changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(n-1)x} e^{-x^2/2} \sin(2\pi x) dx &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-(n-1))^2/2} \sin(2\pi x) dx \\ &= e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi(z+(n-1))) dz = e^{-(n-1)^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} \sin(2\pi z) dz = 0, \end{aligned}$$

par parité. Donc $\mathbb{E}[Y_a^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 0$ et tout $a \in [-1, 1]$: les moments ne caractérisent pas la loi, puisque clairement Y_a et Y n'ont pas la même loi si $a \neq 0$. □

6. (*) Soit $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$ loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = [X + 1]$? (partie entière de $X + 1$)

Proof. Y prend ses valeurs dans \mathbf{N}^* et $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X + 1 < k + 1) = F_X(k) - F_X(k - 1)$, donc $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda k}) - (1 - e^{-\lambda(k-1)}) = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda(k-1)}$. Ainsi $\mathbb{P}(Y = k) = (1 - e^{-\lambda})(e^{-\lambda})^{k-1}$ pour $k \geq 1$: $Y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$: loi géométrique. □

7. (**) Soit U une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$. Soit X une variable de fonction de répartition F_X que l'on supposera strictement croissante et dérivable sur \mathbf{R} .

- Montrer F_X est une fonction admettant une application réciproque sur $]0, 1[$, notée F_X^{-1} .
- Démontrer que la loi de la variable $F_X^{-1}(U)$ est la même que celle de X .
- A partir de la touche **RAND** d'une calculatrice, comment obtenir une réalisation d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 3?
- Même question si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$. Quelle est alors l'espérance de $F_X^{-1}(U)$?

Proof. (a) Si F_X est strictement croissante et dérivable, donc continue, alors comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$, on en déduit que $F_X : \mathbf{R} \rightarrow]0, 1[$. De plus, pour tout $y \in]0, 1[$, s'il existe $x < x'$ tel que $F_X(x) = F_X(x') = y$ alors F_X ne serait pas strictement croissante: F_X est bien bijective, et admet une fonction réciproque F_X^{-1} sur $]0, 1[$.

- (b) Comme F_X est dérivable et strictement croissante, sa dérivée ne s'annule pas, donc F_X^{-1} est dérivable et strictement croissante sur $]0, 1[$, donc continue: $F_X^{-1}(U)$ est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui prend ses valeurs dans \mathbf{R} . On a pour tout $x \in \mathbf{R}$, en utilisant le fait que $F_X(F_X^{-1}(U)) = U$ et F_X strictement croissante,

$$\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_U(F_X(x)) = F_X(x) \quad \text{car } F_U(u) = u \text{ pour tout } u \in [0, 1].$$

La v.a. $F_X^{-1}(U)$ a donc même fonction de répartition que X , ces deux v.a. ont donc même loi.

- (c) On sait que la touche **RAND** fournit une réalisation d'une v.a. uniforme sur $[0, 1]$. Pour obtenir une réalisation d'une v.a. exponentielle de paramètre, il faudra donc calculer $V = F_X^{-1}(U)$. Or $F_X(x) = 1 - e^{-3x}$, d'où $x = -\ln(1 - F_X(x))/3$ et on en déduit que $V = -\ln(1 - U)/3$.

- (d) Si $F_X(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$ alors $x = \pi \tan(F_X(x) - 1/2)$ soit $W = F_X^{-1}(U) = \pi \tan(U - 1/2)$.

La densité de X est $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, c'est une v.a. qui suit une loi de Cauchy. On a alors $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx$. Mais cette intégrale n'existe pas car:

$$\mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{\pi} [\ln(1+x^2)]_0^{\infty} = +\infty.$$

□

8. (*) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p . De même pour celle d'une loi de Poisson de paramètre λ . En déduire que la somme de 2 v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 est une loi de Poisson. En est-il de même pour la loi géométrique?

Proof. Si X v.a. de loi géométrique de paramètre p alors pour $z \in [-1, 1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p = pz \sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1} = pz \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k = \frac{pz}{1-(1-p)z}.$$

Si X v.a. de loi de Poisson de paramètre λ alors pour $z \in [-1, 1]$,

$$g(z) = \mathbb{E}[z^X] = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{z\lambda} = e^{(z-1)\lambda}.$$

Si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2 , alors par indépendance

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \mathbb{E}[z^{X_1}] \mathbb{E}[z^{X_2}] = e^{(z-1)\lambda_1} e^{(z-1)\lambda_2} = e^{(z-1)(\lambda_1+\lambda_2)}$$

qui caractérise la loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Par le même raisonnement, si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes de lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 ,

$$\mathbb{E}[z^{X_1+X_2}] = \frac{p_1 z}{1-(1-p_1)z} \frac{p_2 z}{1-(1-p_2)z} = \frac{p_1 p_2 z^2}{(1-(1-p_1)z)(1-(1-p_2)z)}$$

qui ne peut clairement pas être simplifié pour faire apparaître la fonction génératrice d'une loi géométrique. \square

9. (*) Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire : a/ gaussienne, b/ de Poisson, c/ exponentielle, d/ uniforme, e/ gamma, f/ binomiale. En déduire que la somme de 2 v.a. gaussiennes indépendantes est gaussienne.

Proof. a/ Pour $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, on peut toujours écrire que $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} m + \sigma Z$, avec $Z \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$. On a alors $\phi_X(u) = \mathbb{E}[e^{iu(m+\sigma Z)}] = e^{i u m} \phi_Z(\sigma u)$. Mais:

$$\phi_Z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i u x - x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}((x-iu)+u^2)} dx = e^{-u^2/2},$$

après changement de variable $y = x - iu$. D'où $\phi_X(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i u m}$.

b/ Si $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{P}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{i u k} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\lambda e^{i u})^k = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{i u}} = e^{\lambda(e^{i u} - 1)}.$$

c/ Si $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x + i u x} dx = \left[\frac{\lambda}{i u - \lambda} e^{(-\lambda + i u)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{-i u + \lambda}.$$

d/ Si $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{U}([a, b])$, alors pour $u \in \mathbf{R}^*$,

$$\phi_X(u) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{i u x} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{\lambda}{i u} e^{i u x} \right]_a^b = \frac{1}{i(b-a)u} (\cos(ub) - \cos(ua) + i(\sin(ub) - \sin(ua))).$$

e/ Si $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\alpha, \beta)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x + i u x} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta - i u)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy = (1 - i u/\beta)^{-\alpha},$$

avec le changement de variable $y = (\beta - i u)x$, soit $dy = (\beta - i u)dx$.

f/ Si $X \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{B}(n, p)$, alors pour $u \in \mathbf{R}$,

$$\phi_X(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{i u k} = (1-p)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{p e^{i u}}{1-p} \right)^k = (1-p)^n \left(1 + \frac{p e^{i u}}{1-p} \right)^n = (1 + p(e^{i u} - 1))^n,$$

en utilisant la formule du binôme.

Si deux v.a. X et X' sont gaussiennes de lois $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m', \sigma'^2)$ sont indépendantes, alors $\phi_{X+X'}(u) = \phi_X(u) \phi_{X'}(u)$ par l'indépendance, soit $\phi_{X+X'}(u) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i u m - \frac{1}{2}\sigma'^2 u^2 + i u m'} = e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2 + \sigma'^2) u^2 + i u(m+m')}$, soit la loi $\mathcal{N}(m+m', \sigma^2 + \sigma'^2)$. \square

10. (***) En utilisant la formule d'inversion de la fonction caractéristique pour les v.a. continues, démontrer que la fonction de caractéristique d'une v.a. de Cauchy de densité $f(x) = \pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$ sur \mathbf{R} est $\phi(u) = e^{-|u|}$.

Proof. On part de la formule de la densité caractéristique $\phi(u) = e^{-|u|}$. Comme on sait que X est une variable "continue" et que cette fonction caractéristique est intégrable, on utilise la formule d'inversion:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_X(u) e^{-iux} du \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{R}.$$

Donc pour $x \in \mathbf{R}$, $f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|-iux} du$. On en déduit que:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{u-iux} du + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u-iux} du = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{u-iux}}{1-ix} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-u-iux}}{-1-ix} \right]_0^{\infty} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Par unicité de la fonction caractéristique, on en déduit que celle-ci est bien celle d'une loi de Cauchy. \square

11. (**) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

- (a) Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.
 (b) On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer que

$$(\mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}])^2 \leq \mathbb{E}[X^2] \mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]).$$

- (c) Montrer que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a l'Inégalité de Paley-Zygmund:

$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Proof. (a) Si $X > \lambda \mathbb{E}[X]$ alors le terme de droite vaut X , donc l'inégalité est vérifiée. Si $X \leq \lambda \mathbb{E}[X]$, alors $\lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}} = \lambda \mathbb{E}[X]$. Mais comme cela a lieu pour $X \leq \lambda \mathbb{E}[X]$, l'inégalité est bien vérifiée. Elle l'est donc dans tous les cas.

- (b) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que

$$\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}^2] = \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}] = \mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]).$$

- (c) Grâce à la première question, $X - \lambda \mathbb{E}[X] \leq X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$. En prenant l'espérance on obtient donc que $(1-\lambda) \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}]$. Comme $\mathbb{E}[X] \geq 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, alors $(1-\lambda) \mathbb{E}[X] \geq 0$. Donc

$$(1-\lambda)^2 (\mathbb{E}[X])^2 \leq (\mathbb{E}[X \mathbb{I}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}])^2.$$

Le résultat final est alors obtenu grâce à celui de la deuxième question. \square