Université Paris I, Panthéon - Sorbonne

LICENCE M.I.A.S.H.S. TROISIÈME ANNÉE 2024 – 2025

Test 1 de Statistique 2

Soit une variable aléatoire X absolument continue de densité $f_X(x) = c\, x^{-1/2} \mathbb{I}_{]0,1]}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$, avec $c \in \mathbf{R}$.

1. Déterminer c. En déduire $\mathbb{E}[X]$.
2. On considère la variable Y telle que $Y = 1/X$ si $X > 1/4$ et $Y = 2$ si $X \leq 1/4$. Déterminer la fonction de répartition de Y et $\mathrm{var}(Y)$.
3. Déterminer les quantiles à 5% et 95% de Y.

Proof.

1. On doit vérifier $\int_{\mathbf{R}} f_X(x)\, dx = 1$, $f_X \geq 0$ et f_X borélienne. Cela impose $c > 0$, puis $c \int_0^1 x^{-1/2}\, dx = c\, \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 = 2\, c = 1$, donc $c = \frac{1}{2}$.
   On en déduit que $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{1}{2}\, \big[\frac{2}{3}\, x^{3/2}\big]_0^1 = \frac{1}{3}$.
2. Si $Y = 1/X$ quand $1 > X > 1/4$, cela signifie que Y prend ses valeurs dans $[1, 4]$. Et quand $X \leq 1/4$ alors $Y = 2$, donc on a encore $Y \in [1, 4]$. De ceci on en déduit que:
   - Si $y < 1$, alors $F_Y(y) = 0$;
   - Si $y \geq 4$, alors $F_Y(y) = 1$;
   - Si $1 \leq y < 2$, alors $F_Y(y) = \mathbb{P}(1/X \leq y) = \mathbb{P}(1/y \leq X \leq 1) = \big[\sqrt{x}\big]_{1/y}^1 = 1 - y^{-1/2}$;
   - Si $y = 2$, $F_Y(2) = \mathbb{P}(Y < 2) + \mathbb{P}(Y = 2) = (1 - 2^{-1/2}) + \mathbb{P}(X \leq 1/4) = (1 - 2^{-1/2}) + \big[\sqrt{x}\big]_0^{1/4} = \frac{3}{2} - 2^{-1/2}$;
   - Si $2 < y \leq 4$, $F_Y(y) = F_Y(2) + \mathbb{P}(2 < Y \leq y) = \frac{3}{2} - 2^{-1/2} + \mathbb{P}(\frac{1}{y} \leq X < \frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - 2^{-1/2} + 2^{-1/2} - y^{-1/2} = \frac{3}{2} - y^{-1/2}$.

   On peut donc écrire que $\mathbb{P}(Y \in A) = \int_A \frac{1}{2}\, y^{-3/2}\, \mathbb{I}_{1 \leq y \leq 4}\, dy + \frac{1}{2}\, \delta_{\{2\}}(A)$.
   On en déduit ainsi que $\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{2}\, \int_1^4 y^{-1/2} dy + 2\, \mathbb{P}(Y = 2) = \big[\sqrt{y}\big]_1^4 + 1 = 2$.
   De même, $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{2}\, \int_1^4 y^{1/2} dy + 2^2\, \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{3}\, \big[y^{3/2}\big]_1^4 + 2 = \frac{1}{3}\, (8 - 1) + 2 = \frac{13}{3}$.
   De ceci on en déduit que $\mathrm{var}(Y) = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$.
3. On cherche le réel q_5 tel que $F_Y(q_5) = 0.05$, ce qui revient à l'équation $1 - q_5^{-1/2} = 0.05$, ou encore $q_5^{-1/2} = 0.95$, donc $q_5 = 0.95^{-2}$.
   De même on cherche le réel q_{95} tel que $F_Y(q_{95}) = 0.95$, soit $\frac{3}{2} - q_{95}^{-1/2} = 0.95$, donc $q_{95} = 0.55^{-2}$.

□